$$=\frac{1}{2}+1+\ln\sqrt{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(3+\ln 2)$$

2) La fonction admet un minimum absolu en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ atteint $\frac{1}{2}(3+\ln 2)>0$ d'où $\forall x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)>0$.

II/ $f(x)=x+2+\frac{\ln x}{x}, x>0$

1) a) $x\mapsto x+2$: est une fonction polynôme

Donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$.

$x\mapsto\frac{\ln x}{x}$: est dérivable sur $]0,+\infty[$: quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et par suite f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=(x+2)'+\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=1+\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}$$

$$=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et $g(x)>0$

Donc $\forall x>0$ on a $f'(x)>0$

T.V :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	|	+	
$f(x)$	| $-\infty$	↗	$+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2+\frac{\ln x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+2)+\underbrace{\ln x}_{-\infty}.\overbrace{\frac{1}{x}}^{+\infty}=-\infty$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

2) a) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{x+2}{x}}^{1}+\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{\ln x}{x}=2$$

Donc la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique a C au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de : $f(x)-(x+2)$:

On a : $f(x)-(x+2)=\frac{\ln x}{x}, x>0$

D'où on a :

X	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	|	−	0	+	
Position	|	Δ/C	|	C/Δ	
			$(H,3)$		

3) $x\in[1,+\infty[$

a) $M(x,f(x))$ et $N(x,x+2)$

On a : $MN=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$

$$=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-(x+2))^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\ln x}{x}+(x+2)-(x+2)\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}=\left|\frac{\ln x}{x}\right|=\frac{\ln x}{x}$$

Car $x\geq 1$ donc $\ln x>0$ et $x>0$

D'où : $\boxed{MN=\frac{\ln x}{x}}$

b) on a : $MN=\frac{\ln x}{x}$ donc

Qarray.tn -Aqra Bleen Qarray.tn